3次元単線織多様体上の曲線の変形障害について

那須 弘和 (東海大学理学部情報数理学科) [1]

固定された射影的代数多様体 V の閉部分多様体全体の集合にスキームの構造を入れたものを **Hilbert scheme** と呼ぶ. Hilbert scheme は Grothendieck により構成され, 代数幾何学における研究対象であるモジュライと呼ばれるものの一つである.

考察する閉部分多様体を曲線 (1次元の代数多様体) に制限したものを曲線の Hilbert scheme という. 曲線の Hilbert scheme はたとえ曲線を幾何学的に良い対象に制限しても一般には悪い特異点を持つことが知られている. Mumford [1] はそのような例を初めて与えた. 3次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異連結曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ の既約成分をひとつ与え, その生成点において $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ が被約でない (non-reduced) ことを示し, 病理 **(pathology)** と位置付けた. 具体的には次のとおりである.

例 1. $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ は非特異3次曲面で E はその中の直線, $C \subset S_3$ は S_3 上の線形系 $|4h+2E| \simeq \mathbb{P}^{37}$ に属する非特異曲線とする. このような C は $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ の局所閉既約部分集合 $W = W^{56}$, ($|3H| \simeq \mathbb{P}^{19}$ 上の $\mathbb{P}^{37}$-束の開部分集合) によりパラメータづけられる. ただし, H は平面で h はそれの S_3 への制限である. このとき, $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ は W に沿って生成的に被約でない.

この例を次の 2 条件をみたす単線織 (uniruled) な 3 次元代数多様体 V に拡張した.

(A) V は有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1 \subset V$ とその変形でもって覆われる. (よって, 法束 $N_{E/V}$ は大域切断で生成される.)

(B) $V \supset S \supset E$ なる非特異曲面 S でもって $(E^2)_S = -1$ と $h^1(\mathcal{O}_S(S)) = p_g(S) = 0$ をみたすものが存在する.

上の例 ($V = \mathbb{P}^3$) 以外にも cubic 3-fold や $\mathbb{P}^1$ 束 (底曲面は $p_g = 0$) 等がこの 2 条件をみたす.

定理 2 (Mukai-N,'09 [2])**.** 非特異射影的 3 次元多様体 V が上の 2 条件をみたすなら, その上の非特異曲線の Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は生成的に被約でない既約成分 W をもつ.

W の一般元 $C \subset V$ に対して, C を含む S の変形が一意的に存在する. しかし, そこから脱出しようとする C の 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ が存在するために対応する点 $[C]$ における Hilbert scheme の接空間は W の次元より大きい. このような 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ がすべて 2 位無限小変形, すなわち $\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ 上の変形に持ち上がらないため, W は Hilbert scheme の生成的に被約でない既約成分になる.

参考文献

[1] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, *Amer. J. Math.* **84**(1962), 642–648.

[2] S. Mukai and H. Nasu, Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, *J. Algebraic Geom.*, **18** (2009), no. 4, 691–709.

[1] E-mail: nasu@tokai-u.jp