

PRIMARY OBSTRUCTIONS TO DEFORMING EMBEDDED CURVES AND AN APPLICATION TO THE HILBERT SCHEME OF SPACE CURVES

那須弘和 (HIROKAZU NASU)

1. はじめに...

Mumford は非特異空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ のヒルベルトスキームの既約成分でもって、その生成点においてスキームが被約でないような例をはじめて与えた ([9]). 向井茂氏との共同研究では Mumford の例が一般化され、多くの単線織三様体^{*} X に対し、非特異曲線 $C \subset X$ のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分をもつことが示された ([8]). 続編 [11, 12, 13] ではピカル数 1 の任意の非特異 Fano 三様体のヒルベルトスキームの場合へ Mumford の例が拡張された. 近年では三様体に特異点を許し、Enriques-Fano 三様体と呼ばれる特異 Fano 三様体に対しても、Mumford の例が一般化されている ([15]). これら一連

TABLE 1. Mumford 型の生成的非被約成分

3-fold X	surface S	$[C] \in \text{Pic } S$	E	
$\mathbb{P}^3$	del Pezzo	$-K_X _S + 2E$	直線	[9]
$Q^3 \subset \mathbb{P}^4$				[8]
del Pezzo				[8, 11]
$\mathbb{P}^3$ or $V_4 \subset \mathbb{P}^4$	$K3$	$-2K_X _S + 2E$	楕円曲線	[12]
prime Fano			円錐曲線	[13]
Enriques-Fano	Enriques	$-K_X _S + 2E$	ハーフペンシル	[15]

の一般化に共通する考え方は以下のようなものである:

- 三様体上の**特殊な有理曲線**, または**楕円曲線**が三様体上の他の曲線の変形 (障害) に**悪影響を及ぼす**.
- その結果パラメータ空間であるヒルベルトスキームに (非被約成分などの) **特異点が生じる**.

『第 20 回代数曲線論シンポジウム』(2022 年 12 月 10 日, 於 ZOOM) 報告

本研究は JSPS 科研費 20K03541 の助成を受けたものです.

^{*}本報告では 3 次元射影多様体を単に**三様体**と呼ぶ.

研究を進める上で重要な鍵となるのが、曲線の三様体上での変形障害である．[8] では三様体上の曲線の 1 位無限小変形に対し、2 位変形へのリフトに付随する**第一障害** (*primary obstruction*) が零でないための十分条件が与えられた (本報告では**障害性定理**と呼ぶ)．その条件を弱めることにより、障害性定理をさまざまなクラスの三様体に適用することが可能となり、ヒルベルトスキームの特異性への理解が進むことが期待される (cf. 表 1)．本報告では障害性定理の最新の一般化について述べるとともに、空間曲線のヒルベルトスキーム (Kleppe-Ellia 予想) への応用について紹介する．本報告の内容は論文 [14, 16] に基づく．

2. 埋め込み曲線の第 1 変形障害

本節では [8] の**障害性定理**の概略を説明し、可約な極付き無限小変形の場合への一般化 ([14]) について紹介する．

まずヒルベルトスキームの無限小性質について復習する．基礎体 k は代数閉体とし、 X を k 上の射影スキームとする． X の閉部分スキーム $C \subset X$ 全体をパラメータづける自然な射影スキーム $\mathrm{Hilb} X$ が存在し、 X の**ヒルベルトスキーム**と呼ばれる．以下簡単のため C は X 内で局所完全交叉とする．このとき $\mathrm{Hilb} X$ の C に対応する点を $[C]$ で表せば、 $\mathrm{Hilb} X$ の $[C]$ における接空間は、 C の法束 $N_{C/X}$ の 0 次コホモロジー群 $H^0(C, N_{C/X})$ と同型であり、1 次コホモロジー群 $H^1(C, N_{C/X})$ は C の X 内でのすべての変形障害を含む．さらに次元に関する不等式

$$(2.1) \quad h^0(C, N_{C/X}) - h^1(C, N_{C/X}) \leq \dim_{[C]} \mathrm{Hilb} X \leq h^0(C, N_{C/X})$$

が成り立ち、左辺 $h^0(C, N_{C/X}) - h^1(C, N_{C/X})$ は $\mathrm{Hilb} X$ の $[C]$ における**期待次元**と呼ばれる．もし障害空間 $H^1(C, N_{C/X})$ が消滅すれば、 $\mathrm{Hilb} X$ は $[C]$ において非特異であり、その次元も決定される．しかし $H^1(C, N_{C/X}) \neq 0$ の場合には、通常は C の X における変形障害を具体的に計算する必要があり、一般に $\mathrm{Hilb} X$ の $[C]$ での特異性や次元の決定が困難となる[†]．

k 上の双対数環 $k[\varepsilon](:= k[t]/(t^2))$ 上平坦な閉部分スキーム $\tilde{C} \subset X \times \mathrm{Spec} k[\varepsilon]$ でもって、 $\tilde{C} \times \mathrm{Spec} k \simeq C$ を満たすものを C の**1 位無限小変形**という． $\tilde{C}$ は自然に C の X における法束 $N_{C/X}$ の大域切断 $\alpha \in H^0(C, N_{C/X})$ ($\simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$) に対応するため、本報告では両者を混同して用いる． α (または $\tilde{C}$) に対し、**第 1 障害** (*primary obstruction*) と呼ばれる $H^1(C, N_{C/X})$ の元 $\mathrm{ob}(\alpha)$ が定義され次が成り立つ：

$$\mathrm{ob}(\alpha) = 0 \iff \tilde{C} \text{ は } k[t]/(t^3) \text{ 上の変形 } \tilde{\tilde{C}} \text{ にリフト可能である.}$$

[†]このような場合にも $\mathrm{Hilb} X$ の次元と特異性を決定するのが本研究の目標である．

自然な包含 $H^1(C, N_{C/X}) \subset \text{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ により, $\text{ob}(\alpha)$ は $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$ の元とみなすことができ, コホモロジー類のカップ積

$$\text{ob}(\alpha) = \alpha \cup \mathbf{e} \cup \alpha$$

と表される. ここで $\mathbf{e}$ は X 上の自然な層短完全列 $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ の拡大類を表す. もし $\text{ob}(\alpha) \neq 0$ を満たす α が存在すれば, 非特異性の無限小持ち上げに関する性質 (infinitesimal lifting property) により, $[C]$ は $\text{Hilb } X$ の特異点となる.

ここからは X は 3 次元 (射影) 多様体とし, $C \subset X$ は既約曲線と仮定する. さらに次の条件を仮定する:

- $C \subset S \subset X$ を満たす中間曲面 S が存在し, $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ が正則埋め込みである.
- C と異なる S 上の既約曲線 E が存在し, 任意の $m \geq 1$ に対しコホモロジー群の自然な写像

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mE)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))$$

が単射である.

最後の条件を満たす E の例としては, 例えば S 上の第 1 種例外曲線 ($\iff E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $(E^2)_S = -1$) などが挙げられる. $\tilde{C}$ を $C \subset X$ の 1 位無限小変形とし, $\alpha \in H^0(C, N_{C/X})$ を対応する大域切断とする. 法束の自然な射影 $\pi_{C/S} : N_{C/X} \rightarrow N_{S/X}|_C$ はコホモロジー群の写像 $H^i(\pi_{C/S}) : H^i(C, N_{C/X}) \rightarrow H^i(C, N_{S/X}|_C)$ ($i = 0, 1$) を誘導するが, この写像による α と $\text{ob}(\alpha)$ の像を, それぞれの**外成分** (*exterior component*) と呼び, それぞれ記号 $\pi_{C/S}(\alpha)$ と $\text{ob}_S(\alpha)$ で表す. ここでもう一つの条件

- α の外成分 $\pi_{C/S}(\alpha)$ が S 上の直線束 $N_{S/X}(E)$ の大域切断 β にリフトする, すなわち $\pi_{C/S}(\alpha) = \beta|_C \in H^0(C, N_{S/X}(E)|_C)$,

を仮定する. $N_{S/X}$ の有理切断 β は $S \subset X$ の**極付き無限小変形** (*infinitesimal deformation with poles*) と呼ばれる. β の E への制限 (すなわち β の E での主要部) を $\beta|_E \in H^0(E, N_{S/X}(E)|_E)$ で表せば, 図 1 の関係を満たす. ただし同図において ∂_E は法束の完

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(N_{C/X}) \ni & \alpha & & & H^0(N_{E/X}(E)) \\
\downarrow \pi_{C/S} & \downarrow & & & \downarrow \pi_{E/S}(E) \\
H^0(N_{S/X}|_C) \ni & \pi_{C/S}(\alpha) & \xleftarrow{\text{res}} & \beta & \xrightarrow{\text{res}} & \beta|_E & \in H^0(N_{S/X}(E)|_E) \\
\cap & & & \cap & & \downarrow & \downarrow \partial_E \\
H^0(N_{S/X}(E)|_C) & & \xleftarrow{\text{res}} & H^0(N_{S/X}(E)) & & \partial_E(\beta|_E) & \in H^1(\mathcal{O}_E(2E))
\end{array}$$

FIGURE 1. α と $\beta, \beta|_E$ の間の関係

全列

$$[0 \longrightarrow N_{E/S} \longrightarrow N_{E/X} \xrightarrow{\pi_{E/S}} N_{S/X}|_E \longrightarrow 0] \otimes_E \mathcal{O}_E(E)$$

の第一余境界写像を表す. 極 E が既約な場合の障害性定理は次で与えられる.

定理 2.1 (障害性定理, cf. [8, 定理 2.2]). S 上の因子 Δ を $\Delta := C + K_X|_S - 2E$ により定義する. 次の条件がすべて満たされるならば, $\alpha \in H^0(C, N_{C/X})$ の第 1 障害 $\text{ob}(\alpha)$ は零でない, すなわち $\tilde{C}$ は 2 位変形にリフトしない.

- (1) $\Delta \cdot E = 2(-E^2 + g(E) - 1)$.
- (2) $\partial_E(\beta|_E) \neq 0$.
- (3) 制限写像 $H^0(S, \Delta) \rightarrow H^0(E, \Delta|_E)$ が全射である.

繰り返しになるが, 定理 2.1 を様々な射影三様体 X に適用することにより, Mumford の例と良く似た $\text{Hilb}^{sc} X$ の非被約成分の存在が証明される (cf. 表 1).

定理 2.1 では E の既約性が仮定されていた. 本定理を重複度をもった可約有効因子 E に対し一般化する. E_i ($i = 1, \dots, k$) を S 上の C と異なる既約曲線とし, 互いに交わりをもたないと仮定する. さらに $\bigcup_{i=1}^k E_i$ に台を持つ S 上の任意の有効因子 D, D' ($D \leq D'$) に対し, 自然な写像 $H^1(S, \mathcal{O}_S(D)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(D'))$ が単射であると仮定する. 定理 2.1 と同様に β の E_i における主要部を $\beta|_{E_i}$ で表し, E_i 上の層短完全列 $[0 \rightarrow N_{E_i/S} \rightarrow N_{E_i/X} \rightarrow N_{S/X}|_{E_i} \rightarrow 0] \otimes_{E_i} \mathcal{O}_{E_i}(m_i E_i)$ の (第一) 余境界写像を ∂_{E_i} で表す. 次が定理 2.1 の一般化である.

定理 2.2 (cf. [14]). $H^1(S, N_{S/X}) = 0$ とする. $E := \sum_{i=1}^k m_i E_i$ ($m_i > 0$), $E_{\text{red}} := \sum_{i=1}^k E_i$ とおく. このとき次の条件が成り立てば, α の第 1 障害 $\text{ob}(\alpha)$ は零でない:

- (1) S 上の因子 $\Delta := C + K_X|_S - 2E$ に対し, 制限写像 $H^0(S, \Delta) \rightarrow H^0(E_{\text{red}}, \Delta|_{E_{\text{red}}})$ が全射であり,
- (2) $m_i \partial_{E_i}(\beta_i) \cup \beta_i \neq 0$ となる $i = 1, \dots, k$ が存在する.

[13, 定理 3.3] でも同様の結果が得られたが, その後反例 (cf. [14, 例 4]) が見つかり, 定理 2.2 の形に改められた. [13, 定理 3.3] では因子 Δ の定義に不備があり, $\text{ob}(\alpha) \neq 0$ を結論づけるためには仮定が不十分である.

定理 2.2 の証明の概略) 定理 2.2 の証明において $\text{ob}(\alpha)$ の非零はその外成分 $\text{ob}_S(\alpha) \in H^1(C, N_{S/X}|_C)$ の非零より導かれる. $\text{ob}_S(\alpha) \neq 0$ は $\text{ob}_S(\alpha) \cup \mathbf{k}_C \neq 0 \in H^2(S, \mathcal{L})$ を經由して証明される. ただし $\mathbf{k}_C$ は拡大類 $\mathbf{k}_C := [0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0]$ を表し, $\mathcal{L} := [N_{S/X}(-C)] \in \text{Pic } S$ とする. β の極を各 i ごとに d -写像

$$d_S : H^0(S, N_{S/X}(m_i E_i)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m_i + 1) E_i))$$

を用いて精密に解析し, 極に関するリダクションを経由して $\text{ob}_S(\alpha) \cup \mathbf{k}_C$ を

$$d_S(\beta)|_{E_{\text{red}}} \cup \beta|_{E_{\text{red}}} = \bigoplus_{i=1}^k m_i \partial_{E_i}(\beta|_{E_i}) \cup \beta|_{E_i} \neq 0$$

に関連づけることで証明される. □

3. 空間曲線のヒルベルトスキームと MUMFORD の例

3次元射影空間内に埋め込まれた曲線を**空間曲線**と呼ぶ. 空間曲線の分類問題は古典的であり, 19世紀の終わりには既に研究されていた ([5],[17]). 近年ではヒルベルトスキームの存在によりその理論的側面が良く理解されているが, 具体的な問題, 例えば次数 d と種数 g の空間曲線をパラメータ付ける部分スキームの既約性や成分の次元・特異性に関しては, 多くの d と g に対し未解決である. 空間曲線のヒルベルトスキームに関する基本的な結果について以下に整理する. 非特異連結空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ のヒルベルトスキームを $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ と表し, 整数 $d > 0$ と $g \geq 0$ に対し, 次数 d と (算術) 種数 g の曲線からなる $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の部分スキームを $H(d, g)^{sc}$ で表す.

- $g \leq d - 3$ ならば $H(d, g)^{sc}$ は既約であり, 次元は期待次元 $4d$ に等しい (cf. [1]).
- g が d に比べ十分大きい場合には $H(d, g)^{sc}$ は可約である. 例えば $H(9, 10)^{sc}$ は2つの36次元既約成分からなる (Noether の例).
- 数値的 Cohen-Macaulay 曲線 (ACM 曲線) 全体は $H(d, g)^{sc}$ の中で非特異開集合をなす. (ACM 曲線族の次元も知られている.) (cf. [3]).
- $H(d, g)^{sc}$ は一般には多くの被約でない既約成分をもつ (cf. [9, 4, 7, 2, 10]).

次の例は空間曲線のヒルベルトスキームの生成的に被約でない既約成分の例として有名である.

例 3.1 (Mumford [9]). S を非特異3次曲面とし, $E \subset S$ を直線とする. S 上の完備線形系 $\Lambda := |-4K_S + 2E|$ を考えれば, その一般元である曲線 C は種数24の非特異14次曲線となる. このような曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ のパラメータ空間 W は56次元であるが, W の生成点 $[C]$ における $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の接次元は $h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 57$ に等しい. 実際 $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は W の閉包 $\overline{W}$ を下部集合とするような生成的に被約でない既約成分を持つ.

次の図式は例 3.1 の W の性質を表している:

$$\begin{array}{ccccc}
C & \in & W^{(56)} & \subset & \text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3 \\
\downarrow & & \downarrow \mathbb{P}^{37}\text{-束} & & \\
(E, S) & \in & U^{(19)} & \subset & G \times |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)| \\
\downarrow & & \downarrow \mathbb{P}^{15}\text{-束} & & \downarrow \\
E & \in & G^{(4)} & = & \{\mathbb{P}^3 \text{ 内の直線} \}.
\end{array}$$

とくに W はグラスマン多様体上の射影空間束と双有理同値であり特に既約である. 次元も

$$\dim W = \infty_{(E,S)} + \dim \Lambda = \infty_E + \infty_{S(\supset E)} + 37 = 4 + 15 + 37 = 56$$

のように計算される. 一方完全列 $0 \rightarrow N_{C/S} \rightarrow N_{C/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{S/\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow 0$ を用いれば, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の $[C]$ における接次元は $h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = h^0(N_{C/S}) + h^0(N_{S/\mathbb{P}^3}|_C) = 37 + 20 = 57$ と求まる. ここで次元の不等式

$$\dim W = 56 \leq \dim_{[C]} \text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3 < h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 57$$

成り立つことに注意する. したがってもし W が $(\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3)_{\text{red}}$ の既約成分ならば, $\text{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ は W の生成点で被約でないことになる.

4. KLEPPE-ELLIA 予想

空間曲線のうち 3 次曲面に含まれるような曲線に関しては多くの研究が知られている ([4, 7, 2, 10]). 中でも非特異 3 次曲面に含まれる曲線については, この曲面のもつ豊かな構造を用いて詳しく研究されてきた. Mumford の例を非特異 3 次曲面に含まれる空間曲線に対し一般化し, 詳しく調べたのが Kleppe [7] である.

S を非特異 3 次曲面とする. よく知られているように S は $\mathbb{P}^2$ の一般の 6 点における爆発と同型である. S のピカル群 $\text{Pic } S$ は 6 本の例外直線 $\mathbf{e}_i$ ($1 \leq i \leq 6$) と $\mathbb{P}^2$ の直線の引き戻し 1 によって生成され, 自由加群 $\mathbb{Z}^7$ と同型になる. つまり S 上の任意の因子 D に対し, これら基底による線型結合としての表示 $[D] = a1 - \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{e}_i$ から 7 整数の組 $(a; b_1, \dots, b_6)$ が定まる. 例えば S の反標準因子 $-K_S (\simeq \mathcal{O}_S(1))$ には組 $(3; 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ が対応する. 一方, 非特異 3 次曲面の対称性から $\mathbb{E}_6$ 型ルート系に付随する Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ [‡] が $\text{Pic } S$ 上に作用するため, 適当な基底変換により

$$(4.1) \quad b_1 \geq \dots \geq b_6 \quad \text{かつ} \quad a \geq b_1 + b_2 + b_3$$

[‡]Weyl 群 $W(\mathbb{E}_6)$ は $\mathbb{P}^2$ の Cremona 変換 σ と $\mathbf{e}_i$ ($1 \leq i \leq 6$) の置換で生成される.

を満たすように $\text{Pic } S$ の基底を取り替えることが可能である. このような $\text{Pic } S$ の基底を (D に対する) **標準基底** と呼ぶ. この基底のもとで S 上の完備線形系 $|D|$ が次数 3 以上の非特異連結曲線を含む為の必要十分条件は $a > b_1$ かつ $b_6 \geq 0$ と表され, その次数 d と種数 g はそれぞれ

$$(4.2) \quad d = 3a - \sum_{i=1}^6 b_i, \quad g = \frac{(a-1)(a-2)}{2} - \sum_{i=1}^6 \frac{b_i(b_i-1)}{2}.$$

と表される. 逆に式 (4.1) および (4.2) を満たす 7 整数の組 $(a; b_1, \dots, b_6)$ が与えられたとき, 空間曲線のヒルベルトスキームの閉部分集合が次のように定義される.

定義 4.1. $(a; b_1, \dots, b_6)$ に付随する $H(d, g)^{sc}$ の閉集合 $W(a; b_1, \dots, b_6)$ を

$$W(a; b_1, \dots, b_6) := \left\{ C \in H(d, g)^{sc} \mid \begin{array}{l} C \subset S \text{ for } \exists S: \text{ smooth cubic, and} \\ [C] = a\mathbf{l} - \sum_{i=1}^6 b_i \mathbf{e}_i \text{ in } \text{Pic } S \end{array} \right\}^-$$

によって定義し, $H(d, g)^{sc}$ の 3-**極大族** とよぶ. (ただし $\{\}^-$ は $H(d, g)^{sc}$ における閉包を表す.)

例えば例 3.1 (Mumford の例) における $\overline{W}$ は

$$\overline{W} = \{ C \mid C \sim -4K_S + 2E \}^- = W(12; 4, 4, 4, 4, 4, 2)$$

と表せ, その一般元 C は図 2 のようになる.

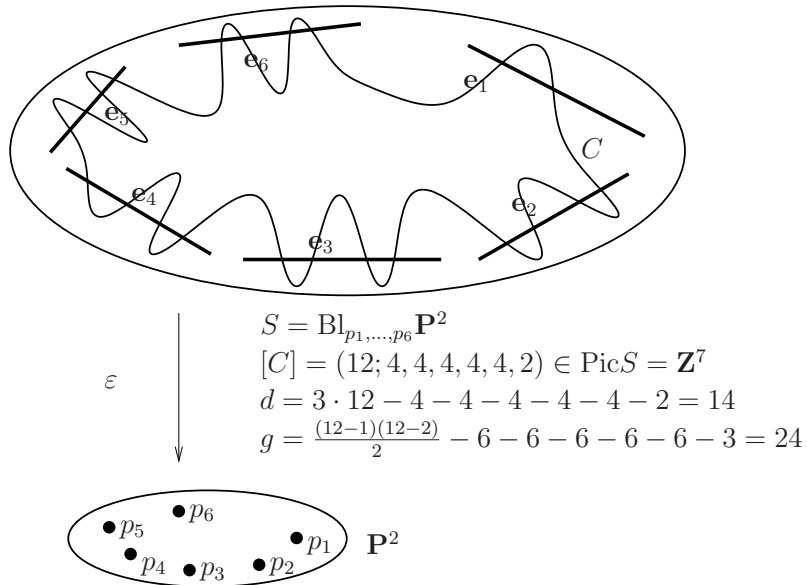


FIGURE 2. マンフォードの例の一般元

命題 4.2 (Kleppe [7]). $d > 9$ とし, $W = W(a; b_1, \dots, b_6)$ を $H(d, g)^{sc}$ の 3-極大族とする. C は W の一般元とし, S は C を含む非特異 3 次曲面 ($d > 9$ より唯一) とする. このとき次が成り立つ:

- (1) $W \longrightarrow |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)| \simeq \mathbb{P}^{19}$, $[C] \mapsto [S]$ は $\mathbb{P}^{d+g-1}$ -束になる ($\dim |\mathcal{O}_S(C)| = d + g - 1$).
- (2) W は既約であり, $\dim W = d + g + 18$ である.
- (3) W が $H(d, g)^{sc}$ の既約成分ならば $d + g + 18 \geq 4d = \chi(N_{C/\mathbb{P}^3})$ が成り立つ.
- (4) $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) = 0$ ならば $W \subset H(d, g)^{sc}$ は既約成分であり[§], かつ $H(d, g)^{sc}$ は W に沿って生成的に非特異 (generically smooth) である.

特に W が生成点で被約でないような $H(d, g)^{sc}$ の既約成分ならば, $g \geq 3d - 18$ かつ $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ が成り立つ. 逆が成り立つことを予想したものが次の Kleppe 予想である.

予想 4.3 (Kleppe [7]). $d > 9$ かつ $g \geq 3d - 18$ とし, $W \subset H(d, g)^{sc}$ を一般元 C が非特異 3 次曲面に含まれるような 3-極大族とする. もし $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) \neq 0$ ならば

- (1) W は $(H(d, g)^{sc})_{\text{red}}$ の既約成分であり,
- (2) $H(d, g)^{sc}$ は W に沿って生成的に被約でない.

この予想は等式 $\dim_{[C]} H(d, g)^{sc} = d + g + 18$ と同値である. 実際予想 4.3 の仮定の下で,

$$h^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) - \dim W = h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3)) > 0$$

が成立し (cf. (5.1)), 予想の主張 (2) は (1) から従う. この予想は Mumford の例の一般化と捉えることも可能だが, 空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分に関する次の基本的な問題と密接に関係している.

問題 4.4. 非特異空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分のうち, その一般元が非特異 3 次曲面に含まれるものを分類せよ.

予想 4.3 が解決すれば, 問題 4.4 が解決する. Kleppe は 2 つの (d, g) -領域: $d \leq 17$ かつ $g > -1 + (d^2 - 4)/8$, および $d \geq 18$ かつ $g > 7 + (d - 2)^2/8$ において, 予想が正しいことを証明した. しかし Ellia [2] は W の一般元 C が線形正規でない ($\Leftrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(1)) \neq 0$) ならば予想の結論 (1) が成り立たないことを反例の構成により示し, 予想 4.3 の仮定に C の線形正規性を追加するように提案した. さらに C が線形正規かつ $d \geq 21$ かつ $g > G(d, 5)$ [¶] ならば予想 4.3 が正しいことも証明している. 次が Ellia によって構成された反例である.

[§]このとき $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形が旗 $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ の変形から導かれる.

[¶]ここで $G(d, 5)$ はどんな 4 次曲面にも含まれないような d 次空間曲線の最大種数を表す.

例 4.5 (Ellia [2]). $F = (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^4$ を非特異 4 次 del Pezzo 曲面とし, $\Gamma = (n) \cap F$ ($n \geq 6$) を非特異完全交叉とする. p_0 を曲面 F 上の点とし, Γ にも F 上の 16 本の直線にも含まれないと仮定する. p_0 からの射影 π_{p_0} により次の図式が導かれる.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & = & (n) \cap F & \subset & F = (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^4 \\ \downarrow \simeq & & & & \downarrow & \downarrow \pi_{p_0} \\ C_0 & \sim & (3n; n, n, n, n, n, 0) & \subset & S_0 = (3) \subset \mathbb{P}^3 \end{array}$$

π_{p_0} による F の像 $S_0 \subset \mathbb{P}^3$ は非特異 3 次曲面になる. 一方 Γ の像 $C_0 \subset S_0$ は Γ と同型であり, $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_{C_0}(1)) \neq 0$ かつ $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_{C_0}(3)) \neq 0$ を満たす. $p_t \notin \mathbb{P}^4 \setminus F$ の p_0 への特殊化 $p_t \rightsquigarrow p_0$ を考えれば, 特殊化 $C_t \rightsquigarrow C_0$ が導かれる. C_0 の変形 C_t ($t \neq 0$) は $\mathbb{P}^3$ 内の非正規 4 次曲面 $\pi_{p_t}(F)$ に含まれる非特異曲線であり, その次数 ($= 4n \geq 24$) からどの非特異 3 次曲面にも含まれない. したがって 3-極大族 $W(3n; n, n, n, n, n, 0)$ を真に含むような $(H(d, g)^{sc})_{\text{red}}$ の既約成分 V が存在する. (つまり $\dim_{[C]} H(d, g)^{sc} > d + g + 18$.)

5. 主結果とその証明

本節の目的は節 2 の障害性定理 (定理 2.2) を応用し次の定理を証明することである.

定理 5.1 (cf. [16]). C が 2 次的正規 (quadratically normal), すなわち $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(2)) = 0$ を満たすならば, Kleppe 予想 (予想 4.3) は正しい.

注意 5.2. (1) $1 \leq n \leq 3$ とする. 予想の $W = W(a; b_1, \dots, b_6)$ に対し, W の一般元 C が n -正規 (つまり $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(n)) = 0$) であるための必要十分条件は $b_6 \geq n$ で与えられる. とくに C が 2 次的正規ならば線形正規であることが従う.

(2) C が線形正規かつ 2 次的非正規 ($\Leftrightarrow b_6 = 1$) の場合の予想はまだ解かれていない (ように思う). 定理の仮定のもとで $h^1(\mathcal{I}_C(3)) \leq 18 = 6 \cdot 3$ が成立し, $h^1(\mathcal{I}_C(3))$ が大きい場合の証明が難しい.

定理 5.1 の証明の概略を述べるために, ヒルベルト旗スキームに関する補題 5.3 を準備する. 射影スキーム X に対し, $C \subset S \subset X$ を満たす閉部分スキームの列 (または対) (C, S) をパラメータづける射影スキーム $\text{HF } X$ が存在し, X の **ヒルベルト旗スキーム** と呼ばれる. 対 (C, S) に対し, X におけるその法層がファイバー積

$$N_{(C,S)/X} := N_{C/X} \times_{N_{S/X}|_C} N_{S/X}$$

によって定義され, $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ が正則埋め込みのとき, ヒルベルトスキームのときと同様の次元の不等式 (cf. (2.1)) が変形理論の一般論から成立する. 以下ヒルベルト旗スキーム

ムからの (第 1) 射影

$$pr_1 : \mathrm{HF} X \rightarrow \mathrm{Hilb} X, \quad (C, S) \mapsto [C]$$

の接写像を $p_1 : H^0(X, N_{(C,S)/X}) \rightarrow H^0(C, N_{C/X})$ で表す.

補題 5.3 (cf. [16, Lem. 2.17]). (1) $H^1(X, N_{(C,S)/X}) = H^0(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes_S N_{S/X}) = 0$, かつ

(2) 任意の $\alpha \in H^0(C, N_{C/X}) \setminus \mathrm{im} p_1$ に対し $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$.

ならば,

$$\dim_{(C,S)} \mathrm{HF} X = \dim_{[C]} \mathrm{Hilb} X$$

が成り立つ.

定理 5.1 の証明の概略 次数に関する仮定により, 予想 4.3 の曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ に対し $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ を満たすような中間 3 次曲面 S が唯一つ存在する. S も $\mathbb{P}^3$ も共に Fano であり, $C \subset S \subset \mathbb{P}^3$ は余次元 1 の列なので $H^1(\mathbb{P}^3, N_{(C,S)/\mathbb{P}^3}) = 0$ が成立する. 従って $\mathbb{P}^3$ のヒルベルト旗スキーム $\mathrm{HF} \mathbb{P}^3$ は (C, S) において非特異, かつ次元は期待次元

$$\chi(\mathbb{P}^3, N_{(C,S)/\mathbb{P}^3}) = d + g + 18$$

に等しいことがわかる. S 上の層短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{C/S} \otimes_S N_{S/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{(C,S)/\mathbb{P}^3} \rightarrow N_{C/\mathbb{P}^3} \rightarrow 0$$

からコホモロジーの長完全列

$$(5.1) \quad H^0(\mathbb{P}^3, N_{(C,S)/\mathbb{P}^3}) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \underbrace{H^1(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes_S N_{S/\mathbb{P}^3})}_{\simeq H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(3))} \longrightarrow 0$$

が誘導される. 主定理 5.1 では C が 2 次正規のため, $\alpha \in H^0(C, N_{C/\mathbb{P}^3}) \setminus \mathrm{im} p_1$ に対し, その外成分 $\pi_{C/S}(\alpha)$ は S 上の適当な直線 $E_1, \dots, E_k$ ($1 \leq k \leq 6$) に対し, S 上の直線束 $N_{S/\mathbb{P}^3}(E_1 + \dots + E_k)$ の大域切断 (すなわち $S \subset \mathbb{P}^3$ の極付き無限小変形) へとリフトする. このリフティングと定理 2.2 を組み合わせて用いることにより, $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ が示せる. したがって補題 5.3 の仮定が満たされ, $\dim_{[C]} H(d, g)^{sc} = \dim_{(C,S)} \mathrm{HF} \mathbb{P}^3 = d + g + 18$ が証明された. $\square$

定理 2.2 はヒルベルトスキームの次元の決定だけでなく, 特異性の決定にも用いられる. $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面, $C \subset S$ を非特異曲線とする. S 上の直線束 $L \in \mathrm{Pic} S$ を次で定義する:

$$L := \mathcal{O}_S(C) \otimes_S N_{S/\mathbb{P}^3}^{-1} \sim C + 3K_S$$

命題 5.4. $|L + K_S| = \emptyset$ または L がネフならば $C \subset \mathbb{P}^3$ は障害を受けない.

非特異3次元面上の空間曲線に対しその変形が障害を受けるための十分条件を曲面上の直線の言葉で述べた定理が次の定理である.

定理 5.5 (cf. [16]). $L + K_S \geq 0$ かつ S 上のある直線 E に対し $m := -L.E > 0$ (つまり L はネフでない) を仮定する. このとき $m = 1$ を満たすか, または $2 \leq m \leq 3$ を満たしかつ次の条件が成り立てば $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形は障害を受ける:

- S 上の因子 $\Delta := L + K_S - 2mE$ に対し制限写像

$$\varrho : H^0(S, \Delta) \rightarrow H^0(E, \Delta|_E)$$

が全射的である.

定理 5.5 の特別な場合として次の系を得る.

系 5.6. $C \subset \mathbb{P}^3$ が非特異3次元曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に含まれ, 次の条件を満たすならば $C \subset \mathbb{P}^3$ の変形は障害を受ける:

- (1) $C + 4K_S \geq 0$, かつ
- (2) $C.\ell = 2$ を満たす直線 $\ell \subset S$ が存在する.

最後に例を紹介する.

例 5.7. $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし 3-極大族

$$W := W(\lambda + 14; 2, 2, 2, 2, 2, 2) \subset H(d, g)^{sc}$$

を考える. このとき W の一般元 C の次数と種数はそれぞれ $d = 3(\lambda + 10)$ と $g = (\lambda + 16)(\lambda + 9)/2$ で与えられる.

$$\text{Bs}|C + 3K_S| = (0; -1, -1, -1, -1, -1, -1) \quad (6 \text{ 直線})$$

より, $h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 6$ となる. したがってヒルベルトスキーム $H(d, g)^{sc}$ は生成点での接次元がスキームの次元よりも6大きな非被約成分を持つ.

例 5.8 (Kleppe [6], 余次元1の特異点の例). 3-極大族

$$W := W(12; 4, 4, 4, 4, 2, 2) \subset H(16, 29)^{sc}$$

を考える. W の次元 $d + g + 18 = 63$ は期待次元 $4d = 64$ より真に小さいため, W は $(H(16, 29)^{sc})_{\text{red}}$ の既約成分でない. 一方, $H(16, 29)^{sc}$ の $[C]$ での接次元は $h^0(N_{C/\mathbb{P}^3}) = 63 + h^1(\mathcal{I}_C(3)) = 65$ に等しいことがわかる. ここで主定理 5.5 または系 5.6 を用いれば, $\dim_{[C]} H(16, 29)^{sc} = 64$ が従う. つまり $H(16, 29)^{sc}$ は W に沿って余次元1の特異点を持つ.

6. おわりに...

第20回代数曲線論シンポジウムで講演の機会を与えていただいた世話役の春井岳さん、高橋剛さん、真瀬真樹子さん、三浦敬さん、渡邊健太さんに感謝します。またこれまで19年間の長きにわたり世話役として、代数曲線論シンポジウムの開催を支えて下さった米田二良先生と大淵朗先生にそのご尽力に対し心からお礼申し上げます。そして今後も代数曲線論シンポジウムが末長く開催され、代数曲線に関する研究が益々発展することをこのシンポジウムの一ファンとして願っています。

REFERENCES

- [1] L. Ein. Hilbert scheme of smooth space curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(4):469–478, 1986.
- [2] P. Ellia. D’autres composantes non réduites de $\text{Hilb } \mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.
- [3] G. Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):423–431, 1975.
- [4] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l’espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.
- [5] G. Halphen. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébrique. *J. Éc. Polyt.*, 52:1–200, 1882.
- [6] J. O. Kleppe. Singularities in codimension 1 of the Hilbert scheme. An example. Preprint, Oslo College of Engineering, <https://www.cs.hioa.no/~jank/papers.htm>, July 1983.
- [7] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.
- [8] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford’s example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.
- [9] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.
- [10] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):117–141, 2006.
- [11] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.
- [12] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface. *Internat. J. Math.*, 28(13):1750099, 30, 2017.
- [13] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a prime Fano 3-fold. *Math. Nachr.*, 292(8):1777–1790, 2019.
- [14] H. Nasu. Corrigendum to “Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface”. *Internat. J. Math.*, 31(12):2092001, 6, 2020.
- [15] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold. *J. Pure Appl. Algebra*, 225(9):106677, 15, 2021.

- [16] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface. *Manuscripta Math.*, 2022. Published online on 11 June 2022, 25 pp.
- [17] M. Noether. *Zur grundlegung der theorie der algebraischen raumcurven*. Verlag der Koniglichen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1883.

〒 259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部情報数理学科
Email address: NASU@TOKAI-U.JP