3次元Fano多様体上のK3曲面に含まれる曲線の変形障害について*

那須弘和 (Hirokazu NASU) †

1　はじめに

射影的代数多様体 V に対し, V 上の非特異連結曲線 $C \subset V$ のヒルベルトスキームを $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ で表す. Mumford [13] は, モジュライ空間の病理 (**pathology**) として, 3次元射影空間内の曲線 (空間曲線) のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ が, 生成的に被約でない (generically non-reduced) 既約成分を持つことを初めて示した. その後, Kleppe [8], Ellia [1], Gruson-Peskine [5], Fløystad [3], 那須 [14] などにより $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ に対し, Mumford の例の様々な一般化が行われた. 近年になって, 向井・那須 [12] では, Mumford の例が詳細に調べられ, 3次元射影多様体上の曲線の1位無限小変形が2位変形にリフトする為の障害類を計算する技術が発展し, その結果 Mumford の例は次のように一般化された.

定理 1.1 ([12]). 3次元非特異射影多様体 V が次の条件を満たすとき, V 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は (可算無限個の) 生成的に被約でない既約成分を持つ:

(1) V 上に有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ が存在し, 法束 $N_{E/V}$ が大域切断で生成される.

(2) $E \subset S \subset V$ を満たす非特異 (中間) 曲面 S が存在し, E は S 上の (-1)-曲線である, すなわち $E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $E^2 = -1$ である. さらに, $p_g(S) = H^1(S, N_{S/V}) = 0$ が成り立つ.

定理において Mumford の例は, V が $\mathbb{P}^3$, S が非特異3次曲面, E が S 上の直線 (27本の直線のうちの1本) のときの特別な場合になっている. 上の定理を del Pezzo 多様体 [16] や射影直線束 [15] などに適用することにより, 現在まで多くの3次元単線織多様体 V に対し, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ が生成的に被約でない既約成分を持つことが知られている. 一連の結果から, ヒ

---

*研究集会『射影多様体の幾何とその周辺 2015』(平成 27 年 10 月 31 日〜11 月 2 日, 高知大学) 報告

†東海大学理学部情報数理学科

本研究は科研費基盤研究 (C) 課題番号 25400048 の助成を受けたものです.

ルベルトスキームの非被約既約成分 (すなわち, 曲線の変形障害) と (-1)-曲線との間に興味深い関係があることがわかってきた.

最近では Kleppe-Ottem [9] により, 非特異 4 次曲面上の空間曲線の変形が研究され, $\mathrm{Hilb}^{sc}\,\mathbb{P}^3$ の新しい非被約既約成分が構成された (注意 6.3). 彼らの研究に刺激を受けた私は, 非特異 3 次元 Fano 多様体 V 上の曲線 $C \subset V$ が $K3$ 曲面 $S \subset V$ に含まれる場合に, C の V における変形について研究を行った [17]. 本報告ではその主結果について紹介する. まずはじめに, 本研究開始にあたり, 佐藤栄一氏による質問 (問題 6.5) がもう一つの重要な動機となったことをひとこと断っておきたい. 良く知られているように, $K3$ 曲面 S 上の有理曲線 E ($E \simeq \mathbb{P}^1$) は, S 上の (-2)-曲線となる ($E^2 = -2$). また楕円曲線 $F \subset S$ の自己交点数は 0 に等しく, 楕円曲面 $S \to \mathbb{P}^1$ のファイバーとなる. $K3$ 曲面上では, (-2)-曲線と楕円曲線が, Mumford の例における非特異 3 次曲面上の (-1)-曲線と同様の役割を果たし, ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ が生成的に被約でない既約成分を持つ.

定理 1.2. V を非特異 3 次元 Fano 多様体, $S \subset V$ を非特異 $K3$ 曲面, $C \subset S$ を非特異曲線とする. S 上の因子 $D := C + K_V\big|_S$ が有効であり, さらに, S の 1 位無限小変形 $\tilde{S}$ でもって, C のどんな 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ も含まないものが存在すると仮定する.

(1) S 上に (-2)-曲線も楕円曲線も存在しない, または $H^1(S, D) = 0$ ならば, $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は $[C]$ において非特異である.

(2) $D^2 \geq 0$, さらに S 上の (-2)-曲線 E でもって $E.D = -2$ かつ $H^1(S, D - 3E) = 0$ を満たすものが存在するならば, $h^1(S, D) = 1$ である. さらに, 法束の射影 $\pi_{E/S} : N_{E/V} \to N_{S/V}\big|_E$ によるコホモロジー群の誘導写像

$$\pi_{E/S}(E) : H^0(E, N_{E/V}(E)) \longrightarrow H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E) \tag{1.1}$$

が全射でないならば, $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は $[C]$ において特異である.

(3) S 上の楕円曲線 F でもって, $m \geq 2$ に対し $D \sim mF$ を満たすものが存在すれば, $h^1(S, D) = m - 1$ である. さらに, $\pi_{F/S}(F)$ が全射でないならば, $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ は, $[C]$ において特異である.

つまり $H^1(S, D) = 0$ ならば, C は V 上で障害を受けない (**unobstructed**). 一方, $H^1(S, D) \neq 0$ ならば, C は V 上で障害を受ける (**obstructed**) ことが, 部分的に示された. 定理 1.2 の仮定の下で, V のヒルベルト旗スキーム $\mathrm{HF}\,V$ (4 節参照) は, 点 (C, S) において非特異であり (補題 4.2), 点 (C, S) を通る $\mathrm{HF}\,V$ の唯一の既約成分 $\mathcal{W}_{C,S}$ が存在する. 自然な射 $pr_1 : \mathrm{HF}\,V \to \mathrm{Hilb}^{sc}\,V$, $(C, S) \mapsto [C]$ による, $\mathcal{W}_{C,S}$ の像 $W_{C,S}$ は, C を含む **S-極大族**と呼ばれる (定義 4.3). $\mathrm{Hilb}^{sc}\,V$ の $[C]$ における接空間 $H^0(C, N_{C/V})$ において, $W_{C,S}$ の余次元は $h^1(S, D)$ に等しく, コホモロジー群 $H^1(S, D)$ の元は, C の 1 位無限小変形のうち, S のあらゆる 1 位無限小変形から外へ逃れるものに対応する (完全列 (5.1) 参照).

系 1.3. 定理 1.2 の (1),(2),(3) において, 次が成立する.

(a) $h^1(S,D) \le 1$ ならば, $W_{C,S}$ は $(\mathrm{Hilb}^{sc} V)_{\mathrm{red}}$ の既約成分である.

(b) $h^1(S,D)=0$ ならば, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $W_{C,S}$ に沿って生成的に非特異であり, $h^1(S,D)=1$ ならば, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は $W_{C,S}$ に沿って生成的に被約でない.

(c) $H^0(S,-D)=0$ ならば, $\dim_{[C]} \mathrm{Hilb}^{sc} V = S\cdot(K_V)^2/2+g+1$ が成り立つ. ただし g は C の種数を表す.

射影多様体 V の部分多様体 X に対し, X の 1 位無限小変形全体と $N_{X/V}$ の大域切断全体との間には自然な 1 対 1 対応が存在する. X が V 上の局所完全交叉のとき, $\alpha \in H^0(X,N_{X/V})$ に対応する 1 位無限小変形 $\tilde{X}$ が 2 位変形にリフトする為の障害類 $\mathrm{ob}(\alpha)$ は, カップ積

$$H^0(X,N_{X/V}) \times H^0(X,N_{X/V}) \xrightarrow{\cup} H^1(X,N_{X/V}), \qquad \alpha \longmapsto \alpha \cup \alpha = \mathrm{ob}(\alpha)$$

で与えられる. [12] では, 3 次元射影多様体 V 上の曲線 $C \subset V$ と, その 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset V \times \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^2)$ (すなわち $\alpha \in H^0(C,N_{C/V})$) に対し, $\tilde{C}$ が 2 位変形 $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^3)$ にリフトしない (すなわち $\mathrm{ob}(\alpha) \neq 0$ である) 為の十分条件が与えられた (**障害性定理**). 最近その結果の一般化が得られたので, 3 節で紹介する (定理 3.3). また一般化された障害性定理を, 3 次元 Fano 多様体 V と $K3$ 曲面 S に適用することにより, 定理 1.2 (2),(3) が証明される (5 節).

2　ヒルベルトスキームと無限小変形

まず代数多様体の埋め込み変形に関する基本的事実について整理する. 基礎体 k は代数閉体で, 標数は特に断らない限り一般とする. $V \subset \mathbb{P}^n$ を $\mathbb{P}^n$ の閉部分スキーム, $\mathcal{O}_V(1)$ を V 上の豊富な直線束とし, $X \subset V$ を V の閉部分スキーム, $P(X)=\chi(X,\mathcal{O}_X(n))$ を X のヒルベルト多項式とする. このとき射影的スキーム H が存在し, V の閉部分スキーム X' でもって, X と同じヒルベルト多項式を持つものすべてをパラメータ付ける ([4]). このスキーム H は V の**ヒルベルトスキーム**と呼ばれ, $\mathrm{Hilb}\, V$ または $\mathrm{Hilb}_P\, V$ で表される.

$\mathcal{I}_X$ と $N_{X/V} = (\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2)^\vee$ をそれぞれ X の定義イデアル層と法層とし, X に対応する $\mathrm{Hilb}\, V$ の点を $[X]$ で表す. $\mathrm{Hilb}\, V$ の $[X]$ における接空間は, コホモロジー群 $H^0(X,N_{X/V}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ と同型である. X を V 内で変形する際の全ての障害 ob は, コホモロジー群 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ に含まれ, もし X が V 内で局所完全交叉ならば, ob は部分群 $H^1(X,N_{X/V}) \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X,\mathcal{O}_X)$ に含まれる. ヒルベルトスキームの次元に関し, 不等式

$$h^0(X,N_{X/V}) - h^1(X,N_{X/V}) \le \dim_{[X]} \mathrm{Hilb}\, V \le h^0(X,N_{X/V}) \tag{2.1}$$

が成り立ち, 左辺の値 (X が曲線なら $\chi(X, N_{X/V})$ に等しい) は $\mathrm{Hilb}\, V$ の $[X]$ における**期待次元**と呼ばれる. もし $H^1(X, N_{X/V}) = 0$ ならば, $\mathrm{Hilb}\, V$ は $[X]$ において非特異かつ, $h^0(X, N_{X/V})$ 次元である. 双数環 (ring of dual number) $k[t]/(t^2)$ を D で表す. X の V における 1 **位無限小変形**とは, D 上平坦な閉部分スキーム $\tilde{X} \subset X \times \mathrm{Spec}\, D$ でもって, 中心ファイバー $\tilde{X}_0$ が X に等しいものをいう. ヒルベルトスキームの普遍性 (universal property) により, 0 を $[X]$ に写す D-値点 $\psi : \mathrm{Spec}\, D \to \mathrm{Hilb}\, V$ の集合と X の V における 1 位無限小変形の集合の間には自然な 1 対 1 対応が存在する.

非特異性に関する無限小持ち上げの性質 ([6, Prop. 4.4, Chap. 1]) により次の命題を得る.

命題 2.1. もし $\mathrm{Hilb}\, V$ が $[X]$ において非特異ならば, 任意の整数 $n \geq 1$ に対し, X の V における任意の n 位無限小変形はある $(n+1)$ 位無限小変形にリフトする.

この事実により, $X \subset V$ のある 1 位無限小変形 $\tilde{X}$ がどんな 2 位変形 $\tilde{\tilde{X}}$ にもリフトしないならば, $\mathrm{Hilb}\, V$ は $[X]$ において特異である.

以下 $X \subset V$ は局所完全交叉と仮定する. $\tilde{X}$ を $X \subset V$ の 1 位無限小変形とし, α を $\tilde{X}$ に対応する $N_{X/V}$ の大域切断とする. V 上の標準的な層短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

の定める拡大類を $\mathbf{e} \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_X)$ とする. α に対し (すなわち, $\tilde{X}$ に対し), カップ積 $\mathrm{ob}(\alpha) \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X)$ を

$$\mathrm{ob}(\alpha) := \alpha \cup \mathbf{e} \cup \alpha \tag{2.2}$$

により定義すれば, $\tilde{X}$ が 2 位変形にリフトする為の必要十分条件は $\mathrm{ob}(\alpha) = 0$ で与えられる [17, Theorem 2.1]. X は局所完全交叉であるので, $\mathrm{ob}(\alpha)$ はコホモロジー群 $H^1(X, N_{X/V})$ に含まれる. $\mathrm{ob}(\alpha)$ を α に対する ($\tilde{X}$ に対する) **第一障害 (primary obstruction)** と呼ぶ. $\mathrm{Hilb}\, V$ が $[X]$ において非特異であるとき, X は **unobstructed** であるといい, そうでないとき **obstructed** であるという. また $\mathrm{Hilb}\, V$ の既約成分 W に対し, $\mathrm{Hilb}\, V$ が W の生成点 X_η で非特異であるとき, $\mathrm{Hilb}\, V$ は W に沿って**生成的に非特異 (generically smooth)** といい, X_η で特異であるとき, $\mathrm{Hilb}\, V$ は W に沿って**生成的に被約でない (generically non-reduced)** という.

3 障害性定理

向井・那須 [12] では, 非特異 3 次元射影多様体 V 上の非特異曲線 C の埋め込み変形について, $C \subset S \subset V$ を満たす非特異中間曲面 S の存在を仮定して研究が行われた. 特に C

のVにおける1位無限小変形が2位変形へリフトしない為の十分条件が与えられた. 本節ではその結果の一般化について紹介する.

$C \subset S \subset V$を曲線C, 曲面S, 3次元射影多様体Vの旗とし, CはSの中で, SはVの中で, 有効Cartier因子であると仮定する. $\tilde{C}$をCの1位無限小変形とし, 対応する$N_{C/V}$の大域切断をα, さらにαの第一障害を$\mathrm{ob}(\alpha) \in H^1(C, N_{C/V})$とする. 法束の自然な射影$\pi_{C/S} : N_{C/V} \to N_{S/V}\big|_C$はコホモロジー群の写像

$$H^i(C, \pi_{C/S}) : H^i(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^i(C, N_{S/V}\big|_C) \qquad (i = 0, 1)$$

を誘導する.

定義 3.1. $H^i(C, \pi_{C/S})$ $(i = 0, 1)$によるαと$\mathrm{ob}(\alpha)$の像

$$\pi_{C/S}(\alpha) := H^0(C, \pi_{C/S})(\alpha), \qquad \text{および} \qquad \mathrm{ob}_S(\alpha) := H^1(C, \pi_{C/S})(\mathrm{ob}(\alpha))$$

を, それぞれαと$\mathrm{ob}(\alpha)$の**外成分**と呼ぶ.

直感的には, $\pi_{C/S}(\alpha)$は$\tilde{C}$に対し, Sの法線方向への変形を抽出し, $\mathrm{ob}_S(\alpha)$はその変形に付随する障害を表している.

$E \subset S$をS上の有効Cartier因子とし, $m \geq 1$を整数とする. S上の層の短完全列

$$[0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(E) \longrightarrow \mathcal{O}_E(E) \longrightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(mE)$$

は, 各$m \geq 1$に対し, コホモロジー群の写像

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mE)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E)) \tag{3.1}$$

を誘導する. 任意の$m \geq 1$に対し, この写像が単射であると仮定する. 補集合$S \setminus E \subset S$が定める開曲面をS°で表せば, このとき, $H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$上には自然なフィルトレーション$H^1(S, E) \subset H^1(S, 2E) \subset \cdots \subset H^1(S, mE) \subset \cdots \subset H^1(S^\circ, \mathcal{O}_{S^\circ})$が存在する.

定義 3.2. Eに沿ってm位の極を持つ$N_{S/V}$の有理切断

$$\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE)) \setminus H^0(S, N_{S/V}(m-1)E)$$

をSの(Eに沿ってm位の) **極付き無限小変形**と呼ぶ.

Sの任意の極付き無限小変形は, 自然な単射$H^0(S, N_{S/V}(mE)) \hookrightarrow H^0(S^\circ, N_{S^\circ/V^\circ})$により, S°の開多様体$V^\circ := V \setminus E$内の1位無限小変形を誘導する.

$\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$を$S$の極付き無限小変形とし, その$E$への制限$\beta\big|_E \in H^0(E, N_{S/V}(mE)\big|_E)$を考える. S上の層短完全列

$$[0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0] \otimes N_{S/V}(mE)$$

により, $N_{S/V}(mE)\big|_E$ を商層 $N_{S/V}(mE)/N_{S/V}((m-1)E)$ と同一視すれば, $\beta\big|_E$ は β の E における主要部 $\beta \mod N_{S/V}((m-1)E)$ とみなすことができる. E 上の層の短完全列

$$[0 \longrightarrow \underbrace{N_{E/S}}_{\simeq \mathcal{O}_E(E)} \longrightarrow N_{E/V} \longrightarrow N_{S/V}\big|_E \longrightarrow 0] \otimes \mathcal{O}_S(mE) \tag{3.2}$$

の余境界写像を ∂_E とすれば, ∂_E による $\beta\big|_E$ の像 $\partial_E(\beta\big|_E)$ が

$$H^1(E, N_{E/S}(mE)) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E))$$

の元として定まる.

次の定理は [12, Theorem 2.2] の一般化であり, C の V における 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$ に対し, $\tilde{C}$ がどんな 2 位変形 $\tilde{\tilde{C}} \subset V \times \operatorname{Spec} k[t]/(t^3)$ にもリフトしない為の十分条件を与える.

定理 3.3 (**障害性定理**)**.** α を $N_{C/V}$ の大域切断とし, $m \geq 1$ を整数とする. α の外成分 $\pi_{C/S}(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ が S の極付き無限小変形 $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$ にリフトする, すなわち,

$$\pi_{C/S}(\alpha) = \beta\big|_C \qquad \in H^0(C, N_{S/V}(mE)\big|_C)$$

が成り立ち, さらに次の条件が満たされれば, $\mathrm{ob}(\alpha)$ の外成分 $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ は零でない.

(a) $\Delta := C + K_V\big|_S - 2mE$ を S 上の因子とする. このとき, 制限写像 $H^0(S, \Delta) \xrightarrow{|_E} H^0(E, \Delta\big|_E)$ は全射であり,

(b) $\cup$ をカップ積写像

$$H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E)) \times H^0(E, N_{S/V}(mE-C)\big|_E) \xrightarrow{\cup} H^1(E, N_{S/V}((2m+1)E-C)\big|_E)$$

とするとき, カップ積 $m\partial_E(\beta\big|_E) \cup \beta\big|_E$ が零でない.

注意 3.4. (1) 図 1 において, α, $\beta\big|_E$, $\partial(\beta\big|_E)$ の間の関係を表す.

(2) [12, Theorem 2.2] では, E は S 上の非特異曲線であり, 自己交点数 E^2 は負であり, 極付き無限小変形 β の E に沿っての極の位数は $m = 1$ と仮定されていた.

(3) 定理の応用において, E は必ずしも (-1)-曲線である必要はない. 例えば, $K3$ 曲面 S への応用があり, E が (-2)-曲線 ($E^2 = -2$) や楕円曲線 ($E^2 = 0$) の場合にも適用される (§5).

(4) [17, Thm. 3.3] では, さらに β の極 E が可約である場合や, 重複成分を持つ場合へ一般化されている.

$$
\begin{tikzcd}
H^0(N_{C/V}) \arrow[d, "\pi_{C/S}"] & \ni & \alpha \arrow[d, mapsto] & & & & H^0(N_{E/V}(mE)) \arrow[d, "\pi_{E/S}(mE)"] \\
H^0(N_{S/V}\big|_C) \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \ni & \beta\big|_C & \beta \arrow[l, mapsto, "res"'] \arrow[r, mapsto, "res"] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \beta\big|_E \arrow[d, mapsto] & \in & H^0(N_{S/V}(mE)\big|_E) \arrow[d, "\partial_E"] \\
H^0(N_{S/V}(mE)\big|_C) & & & H^0(N_{S/V}(mE)) \arrow[lll, "res"'] & \partial_E(\beta\big|_E) & \in & H^1(\mathcal{O}_E((m+1)E))
\end{tikzcd}
$$

図 1: α と $\beta\big|_E$, $\partial(\beta\big|_E)$ の間の関係

射影多様体 V に対し, V の有効 Cartier 因子のヒルベルトスキームを $\mathrm{Hilb}^{cd} V$ で表す. V の超曲面 $S \subset V$ に対し, S の Picard スキーム $\mathrm{Pic}\, S$ への射（ヒルベルト・ピカール射）を

$$
\psi_S : \mathrm{Hilb}^{cd} V \longrightarrow \mathrm{Pic}\, S, \qquad S' \subset V \longmapsto \mathcal{O}_V(S')\big|_S
$$

により定義する. ψ_S の $[S]$ における接写像

$$
d_S : H^0(S, N_{S/V}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S)
$$

は $S \subset V$ に対する d**-map** と呼ばれる. この d-map は, 写像 (3.1) が単射であるとき, S の因子 E に沿って極を持つ **polar** d**-map**

$$
d_{S^\circ} : H^0(S, N_{S/V}(mE)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))
$$

へと自然に拡張される. このとき, polar d-map d_{S° の像を極 E の近傍で計算することにより次の鍵補題を得る.

補題 3.5 (Key Lemma)**.** 任意の $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(mE))$ に対し, $d_{S^\circ}(\beta) \in H^1(S, \mathcal{O}_S((m+1)E))$ の E における主要部 $d_{S^\circ}(\beta)\big|_E \in H^1(E, \mathcal{O}_E((m+1)E))$ は,

$$
d_{S^\circ}(\beta)\big|_E = m\partial_E(\beta\big|_E)
$$

と表される.

実際, V のアフィン開被覆をとり, チェックコホモロジーを用いて補題の等式の両辺をそれぞれ計算することで証明される.

定理 3.3 の証明の方針) 直接 $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ を示すのではなく, 自然な全射 $H^1(C, N_{S/V}\big|_C) \twoheadrightarrow H^1(C, N_{S/V}((m+1)E)\big|_C)$ による $\mathrm{ob}_S(\alpha)$ の像 $\overline{\mathrm{ob}_S(\alpha)}$ の非零を示す. カップ積による表示 $\overline{\mathrm{ob}_S(\alpha)} = d_{S^\circ}(\beta) \cup \pi_{C/S}(\alpha)$ を用いると, 補題 3.5 により, $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ の証明は, 定理のカップ積 $m\partial_E(\beta) \cup \beta\big|_E \neq 0$ へと帰着される. $\square$

4 ヒルベルト旗スキーム

本節では, ヒルベルト旗スキームについて整理する. その構成法や局所的性質など詳細については, [7, 8, 6, 18] などを参照されたい. V を射影多様体とする. V の閉部分スキームの旗 $C \subset S \subset V$ をパラメータ付けるスキームが存在し, V の**ヒルベルト旗スキーム (Hilbert-flag scheme)** と呼ばれる. ヒルベルトスキームと同様に, C と S のヒルベルト多項式 P, Q を固定した旗スキームを, $\mathrm{HF}_{P,Q} V$ で表し, $\bigsqcup_{P,Q} \mathrm{HF}_{P,Q} V$ を $\mathrm{HF}\, V$ で表す. ヒルベルト (旗) スキームの自然な図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HF}_{P,Q} V & \xrightarrow{pr_2} & \mathrm{Hilb}_Q V \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \\ \mathrm{Hilb}_P V & & \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} (C,S) & \longmapsto & S \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array} \right),$$

が存在し, 各々への射影から定まる射を $pr_i (i = 1, 2)$ で表す. $\mathrm{HF}\, V$ の点 (C, S) における接空間 $A^1(C, S)$ は, $[C]$ と $[S]$ における $\mathrm{Hilb}\, V$ のそれぞれの接空間の ($H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ 上の) ファイバー積

$$\begin{array}{ccc} A^1(C,S) & \xrightarrow{p_1} & H^0(S, N_{S/V}) \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & \square & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ H^0(C, N_{C/V}) & \xrightarrow{\pi_{C/S}} & H^0(X, N_{S/V}\big|_C), \end{array} \tag{4.1}$$

として定義される. ただし, ρ は制限写像を表し, p_i は pr_i の接写像 $(i = 1, 2)$ を, そして $\pi_{C/S}$ は法束の射影を表す. 以下 C と S はともに非特異であり, $\mathrm{Hilb}\, V$ は $[S]$ で非特異であると仮定する. 法束の標準的な短完全列

$$0 \to N_{C/S} \to N_{C/V} \to N_{S/V}\big|_C \to 0$$

が存在し, その余境界写像を $\delta : H^0(C, N_{S/V}\big|_C) \to H^1(C, N_{C/S})$ とする. ρ と δ の合成写像 $\delta \circ \rho$ により, 写像 $\alpha_{C/S} : H^0(S, N_{S/V}) \to H^1(C, N_{C/S})$ を定義すれば, $\alpha_{C/S}$ の余核

$$A^2(C, S) := \operatorname{coker} \alpha_{C/S} \tag{4.2}$$

は $\mathrm{HF}\, V$ の (C, S) における**障害空間 (obstruction space)** を定める. また, ヒルベルトスキームに対する次元評価式 (2.1) と同様に, 不等式

$$\dim A^1(C, S) - \dim A^2(C, S) \le \dim_{(C,S)} \mathrm{HF}\, V \le \dim A^1(C, S) \tag{4.3}$$

が成り立つ ([8, §2] 参照). さらに, ヒルベルト (旗) スキームの接空間と障害空間を関連づける完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes N_{S/V}) \longrightarrow A^1(C, S) \longrightarrow H^0(C, N_{C/V}) \\ &\longrightarrow \operatorname{coker} \rho \longrightarrow A^2(C, S) \longrightarrow H^1(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^1(C, N_{S/V}\big|_C) \end{aligned} \tag{4.4}$$

が存在し, これより以下の事実が導かれる.

補題 4.1 ([8, 9])**.** (1) ρ が全射ならば, $pr_1 : \mathrm{HF}\, V \to \mathrm{Hilb}\, V$, $(C,S) \longmapsto C$ は (C,S) において非特異である.

(2) $H^0(S, N_{S/V}(-C)) = 0$ ならば, pr_1 は (C,S) において局所埋め込みである.

(3) (ヒルベルト旗スキームの期待次元) $\dim C = 1$, $\dim S = 2$ かつ, $H^i(S, N_{S/V}) = 0$ $(i = 1, 2)$ ならば, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dim A^1(C,S) - \dim A^2(C,S) &= \chi(C, N_{C/V}) + \chi(S, \mathcal{I}_{C/S} \otimes N_{S/V}) \\ &= \chi(C, N_{C/S}) + \chi(S, N_{S/V}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで V を 3 次元 Fano 多様体, S を $K3$ 曲面とする. 随伴公式により $N_{C/S} \simeq K_C$ と $N_{S/V} \simeq -K_V\big|_S$ が成り立つ. したがって $H^1(C, N_{C/S})$ は 1 次元であり, $-K_V$ が豊富なので, $i = 1, 2$ に対し $H^i(S, N_{S/V}) = 0$ が成り立つ. このことから次の補題が導かれる.

補題 4.2. V を非特異 3 次元 Fano 多様体とし, $S \subset V$ を非特異 $K3$ 曲面, $C \subset S$ を種数 g の曲線とする. S の 1 位無限小変形 $\tilde{S}$ でもって, C のどんな 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ も含まないものが存在すれば, $A^2(C,S) = 0$ である. 特に $\mathrm{HF}\, V$ は (C,S) において非特異であり, 次元は期待される次元 $(K_V\big|_S)^2/2 + g + 1$ に等しい.

定義 4.3. $\mathrm{HF}\, V$ が (C,S) において非特異であるとし, (C,S) を通る $\mathrm{HF}\, V$ の既約成分を $\mathcal{W}_{C,S}$ とする. 射影 pr_1 による $\mathcal{W}$ の像 $W = pr_1(\mathcal{W}) \subset \mathrm{Hilb}^{sc}\, V$ を (C を含む)S-極大族と呼ぶ.

注意 4.4. $\mathrm{Hilb}^{sc}\, \mathbb{P}^3$ の既約閉部分集合 W に対し, W の一般元を含む曲面の最低次数を $s(W)$ で表す. $\mathrm{Hilb}^{sc}\, \mathbb{P}^3$ の既約閉部分集合 W が, (i) $s(W) = s$ かつ (ii) $\mathrm{Hilb}^{sc}\, \mathbb{P}^3$ の任意の既約閉部分集合 $V \supsetneq W$ に対し, $s(V) > s(W) = s$ を満たすとき, W は s-**極大**であるという ([8] 参照). 上で定義した S-極大族は $\mathrm{Hilb}^{sc}\, \mathbb{P}^3$ に対する s-極大閉部分集合の一般化になっている.

5 $K3$ 曲面上の曲線の変形障害

本節と次節では基礎体 k の標数を 0 と仮定する. V を非特異 3 次元 Fano 多様体とし, $S \subset V$ を非特異 $K3$ 曲面, C をその上の非特異曲線とする. さらに, 定理 1.2 と同様に, S の 1 位無限小変形 $\tilde{S}$ でもって, C のどんな 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ も含まないものが存在すると仮定する. このとき, 補題 4.2 より, ヒルベルト旗スキーム $\mathrm{HF}\, V$ は点 (C,S) において非特異であり, 次元は期待次元に等しい. ρ を (4.1) の制限写像とする. 完全列 $[0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0] \otimes N_{S/V}$ と $H^1(S, N_{S/V}) = 0$ から, $\operatorname{coker} \rho \simeq H^1(S, N_{S/V}(-C))$ が従う. 一

方, S 上の因子 D を $D := C + K_V\big|_S$ で定めると, $N_{S/V}(-C) \simeq -K_V\big|_S - C = -D$ と Serre 双対定理より, $H^1(S, N_{S/V}(-C)) \simeq H^1(S, D)^\vee$ がわかる. したがって, $H^1(S, D) = 0$ のとき, 補題 4.1(1) により, pr_1 は (C, S) において非特異である.

L を $K3$ 曲面 X 上の直線束とする. コホモロジー群 $H^1(X, L)$ の (非) 消滅に関してはよく知られており, 例えば次の事実が成り立つ.

補題 5.1 ([10] の特別な場合)**.** X を非特異 $K3$ 曲面, L を X 上の直線束とする. $L > 0$ と $L^2 \geq 0$ を仮定する. このとき $H^1(X, L) \neq 0$ は次と同値である:

(1) X 上の有効因子 Δ が存在し, $\Delta^2 = -2$ かつ $L.\Delta \leq -2$, または

(2) X 上のネフかつ原始的な有効因子 F が存在し, $F^2 = 0$ かつ $L \sim nF$ $(n \geq 2)$ となる.

つまり $H^1(X, L)$ の (非) 消滅には X 上の (-2)-因子と自己交点数 0 の因子の存在が関係している. X 上に (-2)-曲線も楕円曲線も存在しなければ, X 上の任意の因子 $D \geq 0$ に対し $H^1(X, D) = 0$ である. (この場合 X の effective cone $\mathrm{NE}(X)$ は, X の ample cone $\mathrm{Amp}(X)$ と一致する.) 逆に, X 上の (-2)-曲線 E に対し $D.E \leq -2$ となる場合や, X 上の楕円曲線 F に対し $D \sim mF$ $(m \geq 2)$ となる場合に $H^1(X, D)$ が消滅しない. 定理 1.2 の (2),(3) の結果は, $H^1(S, D) \neq 0$ の特別な場合に C の V における 1 位無限小変形が, 障害を受ける (obstructed) ことを主張している.

定理 1.2 (2) の証明の概略は以下の通りである.

定理 1.2 (2) の証明の概略) まずヒルベルト旗スキーム $\mathrm{HF}\,V$ から $\mathrm{Hilb}\,V$ への射影を $pr_1 : \mathrm{HF}\,V \to \mathrm{Hilb}\,V$, $(C, S) \mapsto C$ とし, その接写像を p_1 とすれば, (4.4) より, コホモロジー群の自然な完全列

$$0 \longrightarrow A^1(C, S) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/V}) \longrightarrow H^1(S, -D) \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

が存在する. 定理 (2) の仮定の下では, 簡単な計算により, $H^1(S, D) \simeq k$ かつ $H^1(S, D - E) = 0$ であることがわかる. 特に p_1 は 1 次元の余核を持つ.

α を $N_{C/V}$ の大域切断とし, $\tilde{C}$ を対応する 1 位無限小変形とする. $\alpha \in \mathrm{im}\, p_1$ ならば, $\tilde{C}$ を含む S の 1 位無限小変形 $\tilde{S}$ が存在し, $\mathrm{HF}\,V$ の (C, S) における非特異性から, (C, S) の 1 位無限小変形 $(\tilde{C}, \tilde{S})$ は大域変形にまでリフトする. よってこの場合には, $\tilde{C}$ は障害を受けない (unobstructed). 一方, α が p_1 の像に含まれないとき, C の対応する 1 位無限小変形 $\tilde{C}$ は障害を受ける (obstructed).

主張 5.2. $\alpha \notin \mathrm{im}\, p_1$ ならば, $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$.

すなわち, $\tilde{C}$ はどんな 2 位無限小変形 $\tilde{\tilde{C}}$ にもリフトせず, 従って大域変形に伸びない. 故に, 命題2.1 により, $\operatorname{Hilb} V$ が $[C]$ において特異であることが従う. 主張 5.2 の証明には, 極付無限小変形 (定義 3.2) の議論を用いる. そのために, 可換図式

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^0(S, N_{S/V}(E-C)) & \xrightarrow{|_E} & H^0(E, N_{S/V}(E-C)\big|_E) \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^0(S, N_{S/V} & \to & H^0(S, N_{S/V}(E)) & \xrightarrow{|_E} & H^0(E, N_{S/V}(E)\big|_E) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle |_C} & & \Big\downarrow{\scriptstyle |_C} & & \Big\downarrow{\scriptstyle |_C} \\
H^0(C, N_{S/V}\big|_C) & \to & H^0(C, N_{S/V}(E)\big|_C) & \xrightarrow{|_E} & k(C \cap E) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
H^1(S, N_{S/V}(-C)) & \to & H^1(S, N_{S/V}(E-C)) & &
\end{array}
$$

を考える. 直線束の同型 $N_{S/V}(E-C) \sim -D+E = -(D-E)$ により, 中央の列の最後のコホモロジー群は,

$$H^1(S, N_{S/V}(E-C)) \simeq H^1(S, D-E)^\vee = 0$$

より消える. 従って, α の外成分 $\pi_{C/S}(\alpha) \in H^0(C, N_{S/V}\big|_C)$ (定義 3.1) は E に沿って極を持つ S の極付き無限小変形 $\beta \in H^0(S, N_{S/V}(E))$ にリフトする. ここで, β に定理 3.3 を適用することにより, 最終的に $\mathrm{ob}_S(\alpha) \neq 0$ が得られる. $\square$

定理 1.2 (3) についても同様で, やはり S の極付無限小変形を考察することにより, 定理 3.3 を用いて証明される.

6 例と応用

定理3.3 と系 1.3 を 4 次曲面上の曲線に応用する. V を 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$, または非特異 4 次超曲面 $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ とし, S を非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$, または非特異超平面切断 $V_4 \cap \mathbb{P}^3 \subset V_4$ とする. C を S 上の非特異連結曲線とし, C の V における変形について考察する. 良く知られているように, S は $K3$ 曲面であり, S が一般ならば, S の Picard 群 $\operatorname{Pic} S$ は S の超平面切断類 $\mathbf{h}$ で生成され, C は S 上の完全交叉になる. $V = \mathbb{P}^3$ の場合は, 特に C は数値的 Cohen-Macaulay 曲線と呼ばれる曲線のクラスに属し, Ellingsrud [2] の結果により, C は障害を受けない (unobstructed). 従って障害を受ける曲線 (族) を構成するためには, Picard 数が 2 以上の 4 次曲面を用いる.

例 6.1. 次の例において, W の閉包 $\overline{W}$ は, $(\mathrm{Hilb}^{sc} V)_{\mathrm{red}}$ の既約成分を成し, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は W に沿って, 生成的に被約でない (generically non-reduced). (実際, W の生成点に $[C_\eta]$ おいて, $h^0(C, N_{C/V}) = \dim W + 1$ が成り立つ).

(1) V を非特異 4 次超曲面 $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ とし, E を V 上の円錐曲線でもって自明な法束 $N_{E/V} \simeq \mathcal{O}_E^2$ を持つもの, S を E を含む V の超平面切断でもって $\mathrm{Pic}\, S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$ を満たすものとする ($\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$). このとき, S 上の完備線形系 $|2\mathbf{h} + 2E|$ の一般元 C は, S 上の次数 12, 種数 13 の非特異連結曲線となる. このような, C は $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ の既約な 16 次元局所閉部分集合によりパラメータ付けられる.

(2) $V = \mathbb{P}^3$ とし, $F \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次楕円曲線, $S \subset \mathbb{P}^3$ を F を含む非特異 4 次曲面とする. このとき, S 上の完備線形系 $|4\mathbf{h} + 2F|$ ($\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$) の一般元 C は, S 上の次数 22, 種数 57 の非特異連結曲線となる. このような, C は $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の既約な 90 次元局所閉部分集合 W によりパラメータ付けられる.

Picard 数 2 の非特異 4 次曲面とその上の非特異曲線の存在については, 森による次の結果が用いられる.

命題 6.2 (森 [11]). (1) 非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に含まれる, 次数 $d > 0$, 種数 $g \geq 0$ の非特異連結空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ が存在するための必要十分条件は, (i) $g = d^2/8 + 1$, または (ii) $g < d^2/8$ かつ $(d, g) \neq (5, 3)$. で与えられる.

(2) 非特異 4 次曲面 $S_0 \subset \mathbb{P}^3$ と, 次数 d, 種数 g の非特異曲線 $C_0 \subset S_0$ が存在すれば, 非特異 4 次曲面 $S_1 \subset \mathbb{P}^3$ と, C_0 と同次同種数の非特異曲線 $C_1 \subset S_1$ が存在し, $\mathrm{Pic}\, S_1$ が超平面切断類 $\mathbf{h}$ と C_1 で生成される.

注意 6.3. Kleppe-Ottem [9] においても, 非特異 4 次曲面上の空間曲線の変形が研究された. 特に, 非特異 4 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ でもって, (i) 直線 E を含み, かつ (ii) S の Picard 数が 2 に等しく, (iii) S の Picard 群 $\mathrm{Pic}\, S$ が $\mathrm{Pic}\, S = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}E$ を満たす ($\mathbf{h} \sim \mathcal{O}_S(1)$) ものに対し, S 上の非特異曲線 C の変形が研究された. その中で, S-極大族 (すなわち 4-極大族) $W_{C,S}$ が $\mathrm{Hilb}^{sc} \mathbb{P}^3$ の生成的に被約でない (または被約な) 既約成分になるための十分条件を与えられている.

例 6.1 (1) において, $n = 3, 4, \ldots$ に対しても, 完備線形系 $\Lambda_n := |n(\mathbf{h} + E)|$ を考えれば, 同様に Λ_n の一般元 C は S 上の次数 $6n$, 種数 $3n^2 + 1$ の非特異連結曲線となる. C を含む $\mathrm{Hilb}^{sc} V_4$ の S-極大族は, 生成的に被約でない既約成分 W_n $(n = 3, 4, \ldots)$ を与え, 次元 $\dim W_n = 3n^2 + 4$ が成り立つ. 特に次の定理を得る.

定理 6.4. $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ を非特異 4 次超曲面とする. このとき, $\mathrm{Hilb}^{sc} V_4$ は可算無限個の生成的に被約でない既約成分を含む.

次の問題は九州大学の佐藤栄一氏によって提起された．定理 6.4 は, 問題が肯定的に解決される可能性を示唆するものである．

問題 6.5 (佐藤 2007)**.** V が指数 1 の非特異 3 次元 Fano 多様体のとき, $\mathrm{Hilb}^{sc} V$ は生成的に被約でない既約成分を含むか?

Fano 指数が 2 に等しい場合 (すなわち, デル・ペッツォ多様体の場合) の同問題に対しては, [16] において, 肯定的な解答が与えられている．

謝辞　この度の研究集会も著者にとって楽しく有意義な研究集会でした．集会を運営し, 講演の機会を与えて下さった高知大学の福間慶明さんと新潟大学の小島秀雄さんに, この場を借りて感謝の意を表します．

参考文献

[1] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.

[2] G. Ellingsrud. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(4):423–431, 1975.

[3] G. Fløystad. Determining obstructions for space curves, with applications to nonreduced components of the Hilbert scheme. *J. Reine Angew. Math.*, 439:11–44, 1993.

[4] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6, no. 221.* 1960.

[5] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.

[6] R. Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, 2010.

[7] J. O. Kleppe. The Hilbert-flag scheme, its properties and its connection with the Hilbert scheme. Applications to curves in 3-space. Preprint (part of thesis), Univ. of Oslo, http://www.iu.hio.no/˜jank/papers.htm, 3 1981.

[8] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.

[9] J. O. Kleppe and J. C. Ottem. Components of the Hilbert scheme of space curves on low-degree smooth surfaces. *Internat. J. Math.*, 26(2):1550017, 30, 2015.

[10] A. L. Knutsen and A. F. Lopez. A sharp vanishing theorem for line bundles on $K3$ or Enriques surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(11):3495–3498, 2007.

[11] S. Mori. On degrees and genera of curves on smooth quartic surfaces in $\mathbf{P}^3$. *Nagoya Math. J.*, 96:127–132, 1984.

[12] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.

[13] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.

[14] H. Nasu. Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):117–141, 2006.

[15] H. Nasu. Deformations of degenerate curves on a Segre 3-fold. In *Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, pages 163–174. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008.

[16] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.

[17] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. III. Deformations of curves lying on a $K3$ surface. preprint, arXiv:1601.07301, 2016.

[18] E. Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

〒 259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部情報数理学科
e-mail address : `nasu@tokai-u.jp`